Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

18/01/2021 - Tema A;

Tempo a disposizione: 2h 20min + 10 min (consegna online)

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un foglio A4 con degli appunti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $\quad y' = \tan(y)x$

1.2 Trovare le soluzioni che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e determinarne il dominio di esistenza:

(a) $\quad y(\sqrt{\pi}) = \pi$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad y(0) = \pi/4$

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla funzione parametrica

$$r(t) = \left(\sqrt{1 + 7\cos^2(\pi t)}\ ,\ \sin(\pi t)\right), \quad t \in [1/2\ ,\ 3/2]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

2.2 Determinare il supporto della curva e disegnarlo. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 1$.

2.4 Sia
$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{42y^2 + 8}}$$
Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$

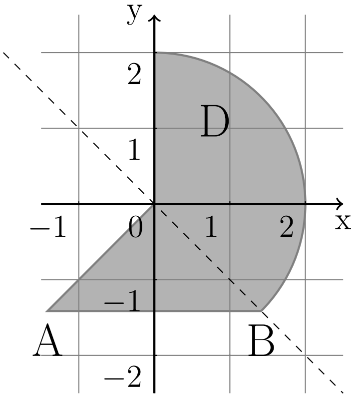
3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $y = 2$.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1, 1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (7 punti)

Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (la curva alla frontiera di D è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$; i vertici A e B hanno coordinate $A = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$,).



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $y' = \tan(y)x$

L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili.

Si nota che bisogna imporre $y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (dominio della tangente).

Inoltre $y = k\pi$ sono soluzioni costanti del problema.

Assumiamo $y \neq k\pi$, allora possiamo separare le variabili:

$$\int \frac{1}{\tan y}\,dy = \int x\,dx$$
$$\log(|\sin(y)|) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$|\sin(y)| = e^{\frac{x^2}{2}+c}$$
$$\sin(y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}+c}$$

Ora bisogna notare che, se y è soluzione, anche $y + k\pi$ è soluzione, per periodicità del seno e per la presenza del valore assoluto.

Per quel che riguarda il dominio, visto che il termine di sinistra restituisce solo valori compresi tra -1 e 1, si deve avere che $e^{\frac{x^2}{2}+c} < 1$, cioè $\frac{x^2}{2} + c < 0 \implies -\sqrt{-2c} < x < \sqrt{-2c}$.

Tenendo conto di queste considerazioni, l'integrale generale è dato dalle soluzioni costanti $y = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e dalle soluzioni del tipo:

$$y = \pm \arcsin(e^{\frac{x^2}{2}+c}) + k\pi, \quad c \in \mathbb{R}, \quad , k \in \mathbb{Z}$$

dove le costanti c e k vanno determinate in base alla condizione iniziale.

1.2 Trovare le soluzioni che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e determinarne il dominio di esistenza:

(a) $y(\sqrt{\pi}) = \pi$ (b) $y(0) = \pi/4$

(a) $y(\sqrt{\pi}) = \pi$. Bisogna ricordarsi che $y = \pi$ è soluzione costante dell'equazione. Il dominio è $\mathbb{R}$.

(b) $y(0) = \frac{\pi}{4}$. Bisogna imporre le condizioni iniziali e conviene partire da

$$|\sin(y)| = e^{x^2/2+c}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = e^c \implies c = \log(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Quindi

$$y = \pm \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{x^2}) + k\pi$$

Imponendo ancora la condizione iniziale, si ottiene $k = 0$ e

$$y = \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{x^2/2})$$

Dominio:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{x^2/2} < 1 \implies \frac{x^2}{2} < \log(\sqrt{2}) \implies -\sqrt{\log(2)} < x < \sqrt{\log(2)}$$

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla funzione parametrica

$$r(t) = \left(\sqrt{1 + 7\cos^2(\pi t)}\ ,\ \sin(\pi t)\right), \quad t \in [1/2\ ,\ 3/2]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

Si ha che $r(\frac{1}{2}) \neq (\frac{3}{2})$. Quindi γ non è chiusa.

Per la semplicità, se $r(t_1) = r(t_2)$, allora deve essere $\sin(\pi t_1) = \sin(\pi t_2)$ che nel dominio non è mai soddisfatta. La curva è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente e la sua norma:

$$r'(t) = \left(-\frac{7\pi \cos(\pi t) \sin(\pi t)}{\sqrt{1 + 7\cos^2(\pi t)}}, \pi \cos(\pi t) \right)$$

Il vettore tangente si annulla in $t = \frac{1}{2}$ e $t = \frac{3}{2}$, quindi $r(t)$ non è regolare. $r(t)$ è regolare in $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ (regolare a tratti).

2.2 Determinare il supporto della curva e disegnarlo. Indicare il verso di percorrenza.

Dalla prima componente si ottiene $x^2/7 = 1/7 + \cos^2(\pi t)$ con $1 \leq x \leq \sqrt{8}$. Dalla seconda si ottiene $y^2 = \sin^2(\pi t)$ con $-1 \leq y \leq 1$. Sommando si ha che il supporto è

$$\frac{1}{8} x^2 + \frac{7}{8} y^2 = 1, \text{ con } 1 \leq x \leq \sqrt{8},$$

che è l'equazione dell'arco di ellisse mostrato in Figura 1, con centro nell'origine e semiasse orizzontale $\sqrt{8}$, e verticale $\sqrt{\frac{8}{7}}$.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 1$.

Si ha $\mathbf{r}(1) = (\sqrt{8}, 0)$ e $r'(1) = (0, \pi)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{8}, & t \in \mathbb{R} \\ y(t) = \pi(t-1) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $x = \sqrt{8}$.

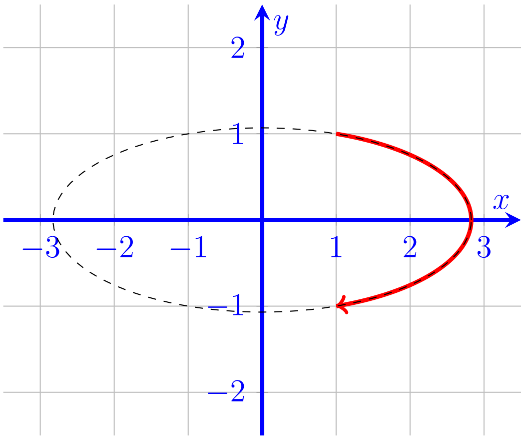


Figura 1: Supporto della curva parametrica (in rosso).

2.4 Sia

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{42y^2+8}}$$

Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

Il dominio di f è $\mathbb{R}^2$, quindi il supporto di γ è contenuto nel dominio. Si ha inoltre:

$$f(r(t)) = \frac{\sqrt{1+7\cos^2(\pi t)}}{\sqrt{42\sin^2(\pi t)+8}}$$

e

$$\|r'(t)\| = |\pi\cos(\pi t)|\sqrt{\frac{42\sin^2(\pi t)+8}{1+7\cos^2(\pi t)}}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_{1/2}^{3/2} f(r(t))\|r'(t)\|\,dt = \\ &= \int_{1/2}^{3/2} |\pi\cos(\pi t)|\,dt = \\ &= -\int_{1/2}^{3/2} \pi\cos(\pi t)\,dt = \\ &= [-\sin(\pi t)]_{1/2}^{3/2} = \\ &= 2\end{aligned}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $y = 2$.

Il dominio di f è $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$. La funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ perché somma e rapporto di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ (anche $\mathcal{C}^\infty$).

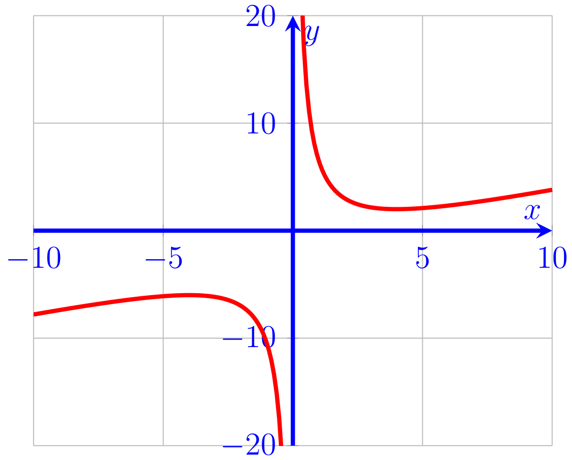


Figura 2: Sezione $x = y$, $z = \dfrac{x^2 - 4x + 16}{2x}$

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y} - \dfrac{8}{x^2} \\ -\dfrac{x}{y^2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2 - 8y}{x^2 y} \\ \dfrac{x - y^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x, y) = 0$ si ottiene dalla prima equazione $y = x^2/8$. Sostituendo nella seconda equazione si ha la condizione:

$$x(1 - \frac{1}{64}x^3) = 0$$

che è soddisfatta per $x = 4$ e $x = 0$ (che non è accettabile per il dominio.). Quindi si ha un unico punto critico:

$$P_1 = (-4, 2)$$

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tale punto. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{16}{x^3} & -\dfrac{1}{y^2} \\ -\dfrac{1}{y^2} & \dfrac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

- P_1: $H_f(-4,2) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}$, det $(H_f(4,2)) = 3/16$ e il primo elemento è negativo, quindi H_f è definita negativa in P_1 e P_1 è punto di massimo locale.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1,1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

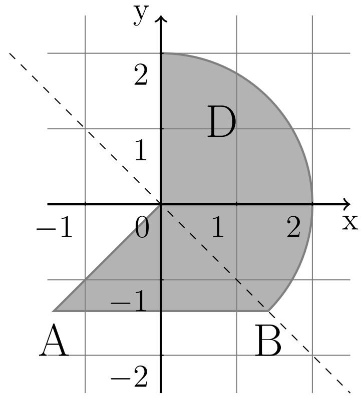
$$\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\nabla f(-1,1)\| = 7$$

Quindi il versore di massima crescita in $(-1,1)$ è: $\mathbf{v} = (-1,0)$.

Il piano tangente ha equazione $z = -7(x+1) - 10 = -7x - 17$.

Problema 4 (7 punti)

Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (la curva alla frontiera di D è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$; i vertici A e B hanno coordinate $A = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$,).



Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta), \ -\frac{pi}{4} \le \theta \le \frac{1}{2}\pi, 0 \le \rho \le 2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \le y \le 0, y \le x \le -y\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{3}{4}\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(\int_y^{-y} 1\,dx\right) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0} -2y\,dy = 2$$

Quindi l'area di D vale $3\pi/2 + 2$

Per il calcolo del baricentro si calcolano $\int\int_D x\,dx\,dy$ e $\int\int_D y\,dx\,dy$:

Coordinata x_c:

$$\int\int_{D_1} x\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho^2\cos(\theta)\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^2 \rho^2\,d\rho\right)$$

$$= [\sin(\theta)]_{-\pi/4}^{\pi/2} \left[\rho^3/3\right]_0^2 = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\frac{8}{3} = \frac{8+4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int\int_{D_2} x\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\int_{y}^{-y} x\,dx\right)\,dy =$$
$$= \int_{0}^{2} \left[x^2/2\right]_{y}^{-y}\,dy = 0$$

Quindi la coordinata x del baricentro è:

$$x_C = \frac{8+4\sqrt{2}}{3}\frac{2}{3\pi+4} = \frac{16+8\sqrt{2}}{9\pi+12} \approx 0.713$$

Coordinata y_c:

$$\int\int_{D_1} y\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{0}^{2} \rho^2\sin(\theta)\,d\rho\right)\,d\theta =$$
$$= \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_{0}^{2} \rho^2\,d\rho\right) =$$
$$= [-\cos(\theta)]_{-\pi/4}^{\pi/2}\left[\rho^3/3\right]_0^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int\int_{D_2} y\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\int_{-y}^{y} y\,dx\right)\,dy =$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} y\,[x]_{y}^{-y}\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0} -2y^2\,dx =$$
$$= -2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{0} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Quindi la coordinata y del baricentro è:

$$y_C = (-\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3})\frac{2}{9\pi+4} = 0$$